Probabilité Et Statistiques - Variables Aléatoires Réelles À Densité

Aubin SIONVILLE

Télécom St Etienne 2023-2024

Densité

On dit que X est une variable aléatoire réelle à densité si F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable presque partout

Notation

$$\mathbb{P}X^{-1} = \mathbb{P}X = \int_{\mathbb{R}} f_X(x)\mathrm{d}x$$

Cas des variables aléatoire discrètes

Une variable aléatoire discrète X n'admet pas de fonction de répartition car F_X n'est pas continue

Une variable aléatoire discrète admet une densité au sens des distributions

Définition alternative

On prend X une v.a. réelle.

S'il existe f positive telle que $\begin{cases} \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = 1 \\ \forall E, \mathbb{P}(X \in E) = \int_E f(x)\mathrm{d}x \end{cases}$

alors X est une v.a. réelle à densité et $f_X = f$

Loi uniforme

On dit que X suit une loi uniforme sur $[0,1]\mathcal{U}_{[0,1]}$ si X admet pour fonction de répartition :

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq t) \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ t & \text{si } t \in [0,1] \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

Lien avec la fonction de répartition

$F_X' = f_X$ presque partout et $\lim_{t\to-\infty} F_X(t) = 0$
Donc $F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\mathrm{d}x$

Existence de la densité

Soit f positive ou nulle sur $\mathbb{R}$ telle que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = 1$

Alors il existe $\begin{cases} \text{Un espace fondamental } \Omega \\ \text{Une probabilité } \mathbb{P} \\ \text{Une v.a. réelle à densité } X \text{ de } \Omega \text{ dans } \mathbb{R} \end{cases}$ telle que f est la densité de proba de X

Calcul de la probabilité

On prend X une v.a. réelle et F_X sa fonction de répartition

Probabilité d'un point

$\boxed{\text{Si } F_X \text{ est continue en } a \text{ alors } \mathbb{P}(X=a)=0}$

Probabilité d'un intervalle

$\boxed{\text{Alors } P(X \in I_{a,b}) = F_X(b) - F_X(a)}$

$\boxed{\text{Si } X \text{ est à densité, } F_X \text{ est } \mathcal{C}^0 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ donc } \forall t \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X=t)=0}$

Espérance

Soit X une v.a. réelle à densité et f_X sa densité

On dit que X admet une espérance si $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |x| f_X(x)\mathrm{d}x < +\infty$

On note alors $\mathbb{E}[X] = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\mathrm{d}x$

Formule de transfert

Soit X une v.a. réelle <u>à densité</u> et ψ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Si $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)| f_X(x)\mathrm{d}x$ converge

Alors $\psi(X)$ admet une espérance et $\mathbb{E}[\psi(X)] = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \psi(x) f_X(x)\mathrm{d}x$

Moment d'ordre n

$$\boxed{\mathbb{E}[X^n] = \int_{\mathbb{R}} x^n f_X(x)\mathrm{d}x}$$

Linéarité

$$\boxed{\mathbb{E}\left[\lambda_0 + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k X_k\right] = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathbb{E}[X_k]}$$

Produit de v.a. indépendantes

Si les X_n sont <u>mutuellement indépendantes</u>,

$$\boxed{\mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} X_k\right] = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}[X_k]}$$

Produit de v.a. avec des fonctions

Si les X_n sont <u>mutuellement indépendantes</u> et les f_n sont <u>bornées</u>,

$$\boxed{\mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} f_k(X_k)\right] = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}[f_k(X_k)]}$$

Inégalité de Markov

Si X est une v.a. réelle d'espérance finie,

$$\boxed{\forall a > 0, \mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[|X|]}{a}}$$

Variable aléatoire centrée

$\boxed{X \text{ est centrée si } \mathbb{E}[X] = 0}$

Pour centrer une v.a. X, on pose $Y = X - \mathbb{E}[X]$

Variance

Soit X une v.a. réelle à densité et f_X sa densité
On dit que X admet une variance si $\int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)\mathrm{d}x < +\infty$
On note alors $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\big[(X-\mathbb{E}[X])^2\big] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Si X est d'epérance et de variance finie,
$\forall a > 0, \mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \dfrac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}$

Linéarité

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \mathrm{Var}(X_k) + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} \lambda_i\lambda_j \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

Si les X_n sont mutuellement indépendantes,

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \mathrm{Var}(X_k)$$

Variable aléatoire réelle réduite

X est réduite si $\mathrm{Var}(X) = 1$

Variable aléatoire réelle centrée réduite

X est centrée réduite si $\mathbb{E}[X] = 0$ et $\mathrm{Var}(X) = 1$

Pour centrer et réduire une v.a. X, on pose $Y = \dfrac{X-\mathbb{E}[X]}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}$